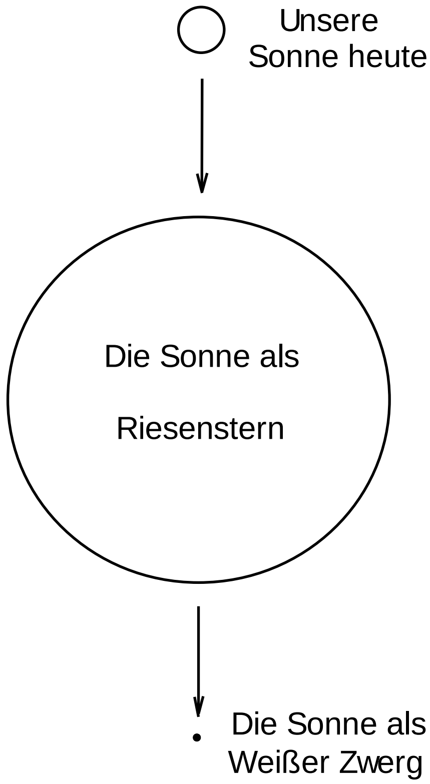
Gulliver und der Weiße Zwerg

Frei nach Jonathan Swifts (1667-1745) Roman „Gullivers Reisen“, einem Klassiker der englischen Literatur, wo Gulliver auch in das Land der Zwerge reist, fragen wir: Könnte sich ein Mensch, den wir uns auf die Dichte eines Weißen Zwerges zusammengeschrumpft denken, in einem Fingerhut verstecken?



Die Sonne ist, wie jeder Stern, eine selbstleuchtende Gaskugel hoher Temperatur. Ihre für irdische Verhältnisse riesige Masse von $1{,}99 \cdot 10^{30} kg$ erzeugt ein mächtiges Gravitationsfeld. Es ermöglicht ihren eigenen Zusammenhalt und die Bewegung der Planeten um sie. Die acht Planeten unseres Sonnensystems ergeben zusammengenommen erst den 750sten Teil der Sonnenmasse. Im Zentrum der Sonne verschmelzen seit 4,6 Milliarden Jahren Atomkerne des Wasserstoffs zu Heliumkernen. Der dabei erzeugte gewaltige Energiestrom nach außen hält die Sonnenoberfläche beständig auf etwa 5500°C, was eine kräftige Energieabstrahlung in den freien Raum bewirkt. Im Widerstreit des von innen nach außen gerichteten Gas- und Strahlungsdruckes und der nach innen wirkenden Gravitation erfreut sich die Sonne seit der Zeit ihrer Entstehung eines stabilen Gleichgewichts, das ihr einen nahezu konstanten Durchmesser von $d_S = 1392000 km$ verleiht. Nachdem unser Zentralgestirn in einigen Milliarden Jahren aber die letzten 10% seines „Lebens“ als Riesenstern verbracht, Merkur und Venus in ihrem Innern verdampft und alles irdische Leben verbrannt haben wird, werden keine Atomkerne mehr miteinander verschmelzen und die Energievorräte erschöpft sein. Der innere Druck, welcher heute der Gravitation Paroli bietet, wird stark abfallen und das Volumen des mächtigen Gasballs nicht mehr aufrecht erhalten können. Die Sonne wird in einer astronomisch kurzen Zeit von einigen Millionen Jahren auf Erdgröße ($R_E = 6371 km$) schrumpfen. Dabei wird ihre Temperatur zwar noch einmal ansteigen, doch der aus ihr hervorgegangene Weiße Zwerg wird mangels Energienachschubes langsam auskühlen.

1. Warum wird die Sonne nach ihrem Riesenstadium wesentlich kleiner sein als heute?
2. In welchem Verhältnis stehen Sonnen- und Erdradius zueinander?
3. Errechnen Sie die mittlere Dichte der Sonne und die Dichte des künftigen Weißen Zwerges unter der Annahme, dass die Sonne bis dahin 30% ihrer Masse verliert.
4. Bekanntlich unterliegt ein Körper an der Erdoberfläche einer normalen Fallbeschleunigung von etwa $9{,}81 ms^{-2}$. Wie groß ist die Fallbeschleunigung an der Oberfläche der heutigen Sonne und auf der Oberfläche des späteren Weißen Zwerges?
5. Ein Satellit umfliege die Erde, ein zweiter die Sonne, ein dritter den Weißen Zwerg. Die Höhe der Satelliten über den Oberflächen sei jeweils 10% des Himmelskörperradius’. Errechnen Sie die jeweiligen Kreisbahngeschwindigkeiten und Umlaufperioden!
6. Überschlagen Sie, welche Masse ein Mensch hätte, wenn sein Volumen mit der Materie eines Weißen Zwerges ausgefüllt wäre!
7. Passt ein Mensch, den man sich auf Weiße-Zwerg-Dichte geschrumpft vorstellt, in einen Fingerhut?

Lösung:

1. Mangels Kernfusion wird der Druck viel kleiner sein heute, so dass die Sonne unter dem Einfluss der Gravitation zu einem viel kleineren Endkörper kontrahiert.

2. $$\frac{R_S}{R_E} = \frac{696000\,km}{6371\,km} = \underline{\underline{109}}$$

   Bemerkung: In der Astronomie wird der Radius kugelförmiger Himmelskörper mit R bezeichnet, um Verwechselungen mit dem Abstand r zwischen den Schwerpunkten zweier Himmelskörper (wie im Newton'schen Gravitationsgesetz) zu vermeiden.

3. $$\rho = \frac{m_S}{V_S} = \frac{m_S}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_S^3} = \frac{1{,}99 \cdot 10^{30}\,kg}{\frac{4}{3}\pi \cdot (696000\,km)^3} = \underline{\underline{1{,}41\frac{g}{cm^3}}}$$

   $$\rho = \frac{m_{WZ}}{V_{WZ}} = \frac{0{,}7 \cdot m_S}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_{WZ}^3} = \frac{1{,}39 \cdot 10^{30}\,kg}{\frac{4}{3}\pi \cdot (6371\,km)^3} = \underline{\underline{1{,}29 \cdot 10^6\,\frac{g}{cm^3}}} = 1{,}29\frac{t}{cm^3}$$

4. Aus der Gleichheit von Gewicht und Gravitationskraft $m \cdot g_S = G \cdot \frac{m_S \cdot m}{r^2}$ ergibt sich

   $$g_S = \frac{G \cdot m_S}{R_S^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,m^3 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}\,kg}{(696000\,km)^2 \cdot kg \cdot s^2} = \underline{\underline{274\frac{m}{s^2}}}$$

   $$g_{WZ} = \frac{G \cdot m_{WZ}}{R_{WZ}^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,m^3 \cdot 1{,}39 \cdot 10^{30}\,kg}{(6371\,km)^2 \cdot kg \cdot s^2} = \underline{\underline{2284000\,\frac{m}{s^2}}}$$

5. Aus der Gleichheit von Radialkraft und Gravitationskraft $\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m_S \cdot m}{r^2}$ folgt

   $$v_E = \sqrt{\frac{G \cdot m_E}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,m^3 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,kg}{7008\,km \cdot kg \cdot s^2}} = \underline{\underline{7{,}538\frac{km}{s}}}$$

   $$T_E = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot 7008\,km \cdot s}{7{,}538\,km} = 5841\,s = 97{,}36\min = \underline{\underline{1{,}62\,h}}$$

   Analog erhält man für die Sonne $\underline{\underline{v_S = 419\frac{km}{s}}}$ und $\underline{\underline{T_S = 3{,}189\,h}}$

   und für den Weißen Zwerg $\underline{\underline{v_{WZ} = 3637\,\frac{km}{s}}}$ und $\underline{\underline{T_{WZ} = 12{,}1\,s}}$ (!).

6. Für die Überschläge 5. und 6. gelte für die Dichte $\rho_{Mensch} = 1\frac{g}{cm^3}$ und $\rho_{WZ} = 1\frac{t}{cm^3}$.

   $$V_{Mensch} \approx 170\,cm \cdot 30\,cm \cdot 20\,cm = 102000\,cm^3 \;\rightarrow\; m = \rho_{WZ} \cdot V_{Mensch} = 1\frac{t}{cm^3} \cdot 102000\,cm^3 \approx \underline{\underline{100000\,t}}$$

7. $$\frac{\rho_{WZ}}{\rho_{Mensch}} = \frac{10^6\,\frac{g}{cm^3}}{1\frac{g}{cm^3}} \;\rightarrow\; \frac{V_{Mensch,WZ}}{V_{Mensch}} = \frac{1}{10^6} \;\rightarrow\; \frac{l_{Mensch,WZ}}{l_{Mensch}} = \frac{1}{100} \;\rightarrow\; l_{Mensch,WZ} = \frac{170\,cm}{100} = \underline{\underline{1{,}7\,cm}}$$

   Oder ohne Gleichungen: Bei zwei Körpern gleicher Masse sind Volumen und Dichte indirekt proportional. Unterscheiden sich die linearen Abmessungen zwei formgleicher Körper durch den Faktor k, so hat der größere das k^3-fache Volumen des anderen. Folglich hätte ein Mensch bei 1000000-facher (k^3) Dichte ein Millionstel Volumen und bei gleich bleibender Masse den 100sten Teil (k^{-1}) seiner Körpergröße. Eine 1,7 m große Person wäre dann 1,7 cm groß und fände in einem Fingerhut Platz.